

1 - الدالة «لوغاريتم نيبيري»

1. مبرهنة وتعريف

- من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما، المعادلة $e^t = x$ تقبل حلا وحيدا t يرمز له $\ln x$.
- العدد الحقيقي $\ln x$ يقرأ اللوغاريتم النيبيري لـ x .
- الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي موجب تماما x العدد $\ln x$ تسمى الدالة «لوغاريتم نيبيري» ويرمز لها بـ \ln .

ملاحظات :

1. الدالة $\ln : x \mapsto \ln x$ معرفة على المجال $]0; +\infty[$ و تأخذ قيمها في \mathbb{R} .

2. المعادلة $e^t = x$ تقبل حلا وحيدا في \mathbb{R} ؛ من أجل كل عدد حقيقي

موجب تماما x (لأن الدالة الأسية $x \mapsto e^x$

معرفة، مستمرة و متزايدة تماما على \mathbb{R}).

3. حل المعادلة $e^x = y_0$ ، حيث y_0 عدد حقيقي موجب تماما

هو العدد الحقيقي x فاصلة النقطة من المنحني الممثل للدالة

$x \mapsto e^x$ ذات الترتيب y_0 .

نكتب : $x = \ln y_0$

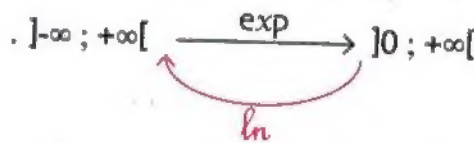
4. من أجل كل عدد حقيقي y موجب تماما، من أجل كل عدد حقيقي x

$e^x = y$ يكافئ $x = \ln y$

5. $e^0 = 1$ يعني $\ln 1 = 0$ ؛ $e^1 = e$ يعني $\ln e = 1$

6. التمثيل الموالي يسمح بالقول أن الدالة

$\ln : x \mapsto \ln x$ هي الدالة العكسية للدالة $\exp : x \mapsto e^x$.



7. من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما، $e^{\ln x} = x$.

من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $\ln e^x = x$.

2. مبرهنة

الدالة «لوغاريتم النيبيري» \ln قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x

موجب تماما، $\ln' x = \frac{1}{x}$.

3. خواص

من أجل كل عددين حقيقيين x و y موجبين تماما و من أجل كل عدد ناطق n .

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y \quad \left| \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y\right.$$

$$\ln(x^n) = n \ln x \quad \left| \quad \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x\right.$$

حالة خاصة: من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما، $\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$.

4. دراسة الدالة «اللوغاريتم النيبيري»

الدالة \ln معرفة على المجال $]0; +\infty[$ و تأخذ قيمها في المجال $]-\infty; +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$$

الدالة \ln قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$.

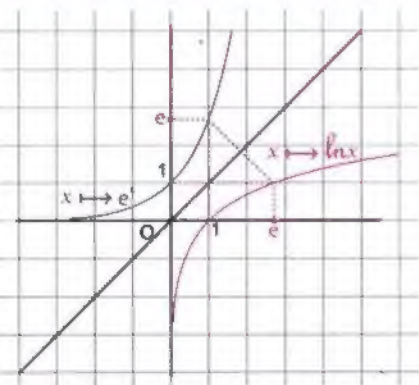
و من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x : $\ln' x = \frac{1}{x}$.

الدالة \ln مستمرة على المجال $]0; +\infty[$ (لأنها قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$).

الدالة \ln متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$.

مما سبق يكون جدول تغيرات الدالة \ln كما يلي :

x	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$		+
$\ln x$	$-\infty$	$+\infty$



المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ (أي محور الترتيب).

هو مستقيم مقارب للمنحنى الممثل للدالة \ln .

المنحنى الممثل للدالة \ln يقبل فرع قطع مكافئ بجوار $+\infty$.

في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس

$(0; \vec{i}, \vec{j})$ المنحنيان المثلان للدالتين \exp و \ln

متناظران بالنسبة إلى المستقيم ذي المعادلة $y = x$.

5. نتيجتان

من أجل كل عددين حقيقيين a و b موجبين تماما،

$\ln a = \ln b$ إذا و فقط إذا كان $a = b$.

$\ln a < \ln b$ إذا و فقط إذا كان $a < b$.

تستعمل هاتان النتيجتان لحل

معادلات و متراجحات.

6. اشتقاق الدالة $x \mapsto \ln|u(x)|$ مبرهنة

u دالة معرفة على مجال I .

إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على I ولا تنعدم على I فإن الدالة $x \mapsto \ln|u(x)|$ قابلة للاشتقاق على I و من أجل كل عدد حقيقي x من I ،

$$(\ln|u(x)|)' = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

7. نهايات شهيرة

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} &= 1 & ; & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x &= 0 & ; & \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{aligned}$$

II - دوال لوغاريتم ودوال أسية أخرى

1. الدالة «اللوغاريتم العشري»

تعريف

الدالة «اللوغاريتم العشري» يرمز لها \log هي الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي :

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

ملاحظات

$$\ln 10 \approx 2,30 \quad ; \quad \log 10 = 1 \quad ; \quad \log 1 = 0.$$

2. الدالة \log قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$

و دالتها المشتقة معرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي :

$$(\log x)' = \frac{1}{x \ln 10}$$

3. الدالة \log لها نفس تغيرات الدالة \ln على المجال $]0; +\infty[$.

خواص

من أجل كل عددين حقيقيين x و y موجبين تماما و من أجل كل عدد ناطق n ،

$$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$$

$$\log(xy) = \log x + \log y$$

$$\log(x^n) = n \log x$$

$$\log\left(\frac{1}{x}\right) = -\log x$$

نتيجة : من أجل كل عددين حقيقيين a و b موجبين تماما،

$$a = b \quad \text{يكافئ} \quad \log a = \log b$$

$$a < b \quad \text{يكافئ} \quad \log a < \log b$$

2. الدوال الأسية ذات الأساس a

تعريف

a عدد حقيقي موجب تماما حيث $a \neq 1$.
نسمي الدالة الأسية ذات الأساس a، يرمز لها \exp_a ، الدالة المعرفة على \mathbb{R} كما يلي $\exp_a(x) = a^x$.

ملاحظة

من أجل كل عدد حقيقي x و من أجل كل عدد حقيقي a موجب تماما حيث $a \neq 1$ ، $a^x = e^{x \ln a}$.

خواص

من أجل كل عددين حقيقيين a و b موجبين تماما حيث $a \neq 1$ و $b \neq 1$ و من أجل كل عددين حقيقيين x و y،

$$(ab)^x = a^x b^x$$

$$a^{x+y} = \frac{a^x}{a^y}$$

$$a^{x+y} = a^x a^y$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

3. تغيرات الدالة \exp_a

1. إذا كان $0 < a < 1$ فإن $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$ ؛ $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$

إذا كان $a > 1$ فإن $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$ ؛ $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$

2. الدالة \exp_a قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}

و من أجل كل عدد حقيقي x : $\exp'_a(x) = (\ln a) a^x$

3. إذا كان $0 < a < 1$ فإن الدالة \exp_a متناقصة تماما على \mathbb{R} .

إذا كان $a > 1$ فإن الدالة \exp_a متزايدة تماما على \mathbb{R} .

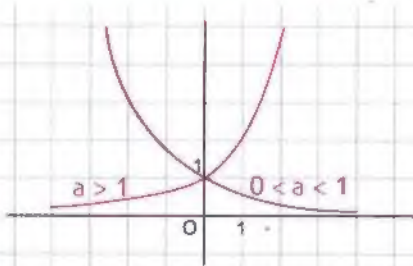
4. جدول التغيرات

x	$-\infty$	$+\infty$
$(a^x)'$		+
a^x	0	$+\infty$

$a > 1$

x	$-\infty$	$+\infty$
$(a^x)'$		-
a^x	$+\infty$	0

$0 < a < 1$



5. عندما a يسمح \mathbb{R}_+^* و $a \neq 1$ كل منحنيات

الدالة \exp_a تشمل النقطة ذات الإحداثيين (0; 1).

محور الفواصل هو مستقيم مقارب أفقي لهذه المنحنيات.

كل هذه المنحنيات تقبل فرع قطع مكافئ منحاه

هو منحنى محور الترتيب.

III - الدالة «جذر نوني»

تعريف

n عدد طبيعي أكبر تماما من 1.

نسمي الدالة «جذر نوني» و نرمز لها بـ $\sqrt[n]{x}$ ، الدالة المعرفة على المجال $[0 ; +\infty[$ و التي ترفق بكل عدد حقيقي x موجب ، العدد الموجب $\sqrt[n]{x}$ حيث $(\sqrt[n]{x})^n = x$.

نتيجة

1. من أجل كل عدد حقيقي موجب x : $A = \sqrt[n]{x}$ يكافئ $A^n = x$.

2. من أجل كل عدد حقيقي موجب x : $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

3. من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما : $\sqrt[n]{x} = e^{\frac{1}{n} \ln x}$.

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$: $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[n]{x} = 0$.

IV - التزايديات المقارنة

نعلم أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ حيث n عدد طبيعي غير منعدم .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

مبرهنة

n عدد طبيعي غير منعدم. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$.

نتيجة

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^x = 0$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \ln x = 0$

التفسير البياني للتزايديات المقارنة

نرسم المنحنيات الممثلة للدوال

$x \mapsto x^3$: $x \mapsto \ln x$: $x \mapsto e^x$

في نفس المعلم المتعامد (\vec{i}, \vec{j}) ، (الشكل).

نلاحظ أنه يوجد عدد حقيقي موجب تماما A حيث من أجل

$x > A$ ، يكون $e^x > x^3 > \ln x$ (بالحاسبة $A \approx 4,6$).

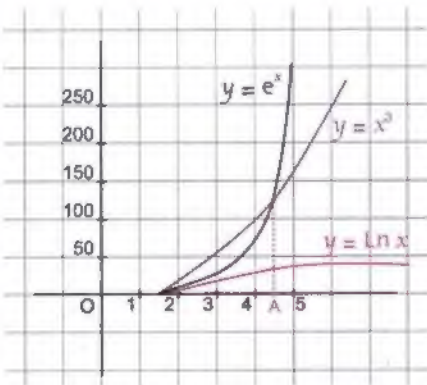
نقول إن الدالة $x \mapsto e^x$ تتزايد بسرعة أكبر بالنسبة إلى

الدالة $x \mapsto x^3$ و الدالة $x \mapsto x^3$ تتزايد بسرعة أكبر بالنسبة إلى الدالة $x \mapsto \ln x$ بجوار $+\infty$.

بصفة عامة، من أجل كل عدد طبيعي n أكبر تماما من 1 ، يوجد عدد حقيقي موجب تماما A حيث

من أجل $x > A$ ، يكون $e^x > x^3 > \ln x$ أي الدالة $x \mapsto e^x$ تتزايد بسرعة أكبر بالنسبة إلى

الدالة $x \mapsto x^n$ و الدالة $x \mapsto x^n$ تتزايد بسرعة أكبر بالنسبة إلى الدالة $x \mapsto \ln x$ بجوار $+\infty$.



اكتب على أبسط شكل الأعداد التالية :

$$\ln 72 - 2\ln \frac{27}{256} + \ln \sqrt{108} \quad ; \quad \ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln 8 + 4\ln \sqrt{2} \quad ; \quad \ln 32$$

$$\ln \frac{1}{8} - \ln 0,375 + 2\ln \sqrt{0,5625}$$

حل

$$1. \text{ لدينا } \ln 32 = \ln 2^5 = 5\ln 2 \quad \text{إذن} \quad \ln 32 = 5\ln 2$$

$$2. \text{ لدينا } \ln \sqrt{2} = \ln 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln 2 \quad ; \quad \ln 8 = \ln 2^3 = 3\ln 2 \quad ; \quad \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$$

$$\text{إذن} \quad \ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln 8 + 4\ln \sqrt{2} = -\ln 2 + \frac{1}{2} \times 3\ln 2 + 4 \times \frac{1}{2} \ln 2$$

$$= -\ln 2 + \frac{3}{2} \ln 2 + 2\ln 2$$

$$= \left(-1 + \frac{3}{2} + 2\right) \ln 2 = \frac{5}{2} \ln 2$$

$$\text{ينتج أن} \quad \ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln 8 + 4\ln \sqrt{2} = \frac{5}{2} \ln 2$$

$$3. \text{ لدينا } \ln 72 = \ln (9 \times 8) = \ln 9 + \ln 8 \\ = 2\ln 3 + 3\ln 2$$

$$\ln \frac{27}{256} = \ln 27 - \ln 256 = \ln 3^3 - \ln 2^8$$

$$= 3\ln 3 - 8\ln 2$$

$$\ln \sqrt{108} = \frac{1}{2} \ln 108 = \frac{1}{2} \ln 4 \times 27$$

$$= \frac{1}{2} \ln 4 + \frac{1}{2} \ln 27 = \ln 2 + \frac{3}{2} \ln 3$$

$$\text{إذن} \quad \ln 72 - 2\ln \frac{27}{256} + \ln \sqrt{108} = 2\ln 3 + 3\ln 2 - 2(3\ln 3 - 8\ln 2) + \ln 2 + \frac{3}{2} \ln 3$$

$$= 2\ln 3 + 3\ln 2 - 6\ln 3 + 16\ln 2 + \ln 2 + \frac{3}{2} \ln 3$$

$$= \left(2 - 6 + \frac{3}{2}\right) \ln 3 + (3 + 16 + 1) \ln 2 = -\frac{5}{2} \ln 3 + 20\ln 2$$

$$\text{إذن} \quad \ln 72 - 2\ln \frac{27}{256} + \ln \sqrt{108} = -\frac{5}{2} \ln 3 + 20\ln 2$$

4. لدينا $\ln \frac{1}{8} = -\ln 8 = -3\ln 2$

$$\ln 0,375 = \ln \frac{375}{1000} = \ln \frac{3}{8} = \ln 3 - \ln 8 = \ln 3 - 3\ln 2$$

$$2\ln \sqrt{0,5625} = \ln 0,5625 = \ln \frac{5625}{10000} = \ln \frac{5}{16} = \ln 9 - \ln 16 = 2\ln 3 - 4\ln 2$$

$$\ln \frac{1}{8} - \ln 0,375 + 2\ln \sqrt{0,5625} = -3\ln 2 - \ln 3 + 3\ln 2 + 2\ln 3 - 4\ln 2 \quad \text{إذن}$$

$$= -4\ln 2 + \ln 3$$

$$\ln \frac{1}{8} - \ln 0,375 + 2\ln \sqrt{0,5625} = -4\ln 2 + \ln 3 \quad \text{و بالتالي}$$

2 حل معادلات ومتراجعات

تمرين 1

حل في \mathbb{R} كل معادلة من المعادلات التالية

$$\ln x + \ln(3x+2) = \ln(2x+3) \quad ; \quad \ln(x-1) = 2\ln 3 - 3\ln 2 \quad ; \quad \ln x = 2$$

$$\ln(x^2 - 2x - 3) = \ln(x+7)$$

حل

1. حل المعادلة $\ln x = 2$

$\ln x$ معرف إذا كان $x > 0$.

إذن $\ln x = 2$ يعني $x > 0$ و $\ln x = \ln e^2$ وبالتالي $x = e^2$

ينتج أن المعادلة $\ln x = 2$ تقبل حلا واحدا في \mathbb{R} هو e^2 .

طريقة أخرى: نعلم أن من أجل $x > 0$ و y عدد حقيقي، $y = \ln x$ يكافئ $x = e^y$

لدينا $\ln x = 2$ إذن $x = e^2$.

2. حل المعادلة $\ln(x-1) = 2\ln 3 - 3\ln 2$

$\ln(x-1)$ معرف إذا كان $x-1 > 0$ أي $x > 1$.

إذن $\ln(x-1) = 2\ln 3 - 3\ln 2$ يعني $x > 1$ و $\ln(x-1) = \ln 3^2 - \ln 2^3$

$$\ln(x-1) = \ln \frac{9}{8} \quad \text{أي } x > 1 \text{ و}$$

$$x-1 = \frac{9}{8} \quad \text{أي } x = \frac{17}{8}$$

ينتج أن المعادلة $\ln(x-1) = 2\ln 3 - 3\ln 2$ تقبل حلا واحدا وهو $\frac{17}{8}$.

$$3. \text{ حل المعادلة } \ln x + \ln(3x+2) = \ln(2x+3)$$

لحل هذه المعادلة نضع الشرط التالي $x > 0$ و $3x+2 > 0$ و $2x+3 > 0$ أي $x > 0$.

$$\text{لدينا } \ln x + \ln(3x+2) = \ln(2x+3) \text{ يعني } x > 0 \text{ و } \ln x(3x+2) = \ln(2x+3)$$

$$\text{إذن } x > 0 \text{ و } x(3x+2) = 2x+3$$

$$\text{أي } x > 0 \text{ و } 3x^2 + 2x = 2x + 3$$

$$\text{أي } x > 0 \text{ و } 3x^2 - 3 = 0$$

$$\text{إذن } x > 0 \text{ و } (x=1 \text{ أو } x=-1) \text{ . ينتج أن } x=1.$$

وبالتالي المعادلة $\ln x + \ln(3x+2) = \ln(2x+3)$ تقبل حلا واحدا هو 1.

$$4. \text{ حل المعادلة } \ln(x^2 - 2x - 3) = \ln(x+7)$$

لحل هذه المعادلة نضع الشرط التالي $x^2 - 2x - 3 > 0$ و $x+7 > 0$.

$$\text{لدينا } x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$$

$$^8 \text{ إذن } x^2 - 2x - 3 > 0 \text{ إذا وفقط إذا كان } x \in]-\infty; -1[\cup]3; +\infty[$$

$$\text{و } x+7 > 0 \text{ إذا وفقط إذا كان } x > -7.$$

$$\text{ينتج أن } x \in]-\infty; -1[\cup]3; +\infty[$$

$$\text{حل المعادلة } \ln(x^2 - 2x - 3) = \ln(x+7) \text{ في المجموعة }]-\infty; -1[\cup]3; +\infty[.$$

$$\text{لدينا } \ln(x^2 - 2x - 3) = \ln(x+7) \text{ إذا وفقط إذا كان } x \in]-\infty; -1[\cup]3; +\infty[$$

$$\text{و } x^2 - 2x - 3 = x+7 \text{ أي } x \in]-\infty; -1[\cup]3; +\infty[\text{ و } x^2 - 3x - 10 = 0.$$

$$\text{حل المعادلة } x^2 - 3x - 10 = 0 \text{ في المجموعة }]-\infty; -1[\cup]3; +\infty[.$$

$$\Delta = 49 : \Delta > 0 \text{ إذن المعادلة تقبل حلين مختلفين هما } x_1 = 5 \text{ و } x_2 = -2.$$

$$\text{لدينا } 5 \text{ و } -2 \text{ ينتميان إلى المجموعة }]-\infty; -1[\cup]3; +\infty[.$$

$$\text{وبالتالي المعادلة } \ln(x^2 - 2x - 3) = \ln(x+7) \text{ تقبل حلين مختلفين هما } 5 \text{ و } -2.$$

تمرين 2

حل كل متراجحة من المتراجحات التالية

$$\ln(x+1) + \ln(3-x) < 0 : \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) > 0 : \ln(x-1) \geq 0$$

$$\ln(x^2 - 1) \geq \ln(4x - 1)$$

1. حل المتراجحة $\ln(x-1) \geq 0$

لحل المتراجحة $\ln(x-1) \geq 0$ نضع الشرط التالي $x-1 > 0$ أي $x > 1$.

لحل المتراجحة $\ln(x-1) \geq 0$ في المجال $]1; +\infty[$.

لدينا $\ln(x-1) \geq \ln 1$ يعني $x > 1$ و $\ln(x-1) \geq \ln 1$

أي $x > 1$ و $x-1 \geq 1$ أي $x > 1$ و $x \geq 2$ إذن $x \geq 2$.

وبالتالي مجموعة حلول المتراجحة $\ln(x-1) \geq 0$ هي $[2; +\infty[$.

2. حل المتراجحة $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) > 0$

لحل المتراجحة $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) > 0$ نضع الشرط التالي $x \neq -1$ و $\frac{x-1}{x+1} > 0$.

أي $x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$.

حل في المجموعة $]1; +\infty[\cup]-\infty; -1[$ المتراجحة $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) > 0$.

لدينا $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) > 0$ يعني $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) > \ln 1$ أي $\frac{x-1}{x+1} > 1$.

أي $\frac{x-1}{x+1} - 1 > 0$ أي $\frac{-2}{x+1} > 0$ أي $\frac{2}{x+1} < 0$.

إذن $x+1 < 0$ وبالتالي $x < -1$.

ينتج أن مجموعة حلول المتراجحة $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) > 0$ هي $]1; +\infty[\cup]-\infty; -1[$.

3. حل المتراجحة $\ln(x+1) + \ln(3-x) < 0$

لحل المتراجحة $\ln(x+1) + \ln(3-x) < 0$ نضع الشرط التالي $x+1 > 0$ و $3-x > 0$.

أي $x > -1$ و $x < 3$ أي $x \in]-1; 3[$.

لحل المتراجحة $\ln(x+1) + \ln(3-x) < 0$ في المجال $]1; 3[$.

لدينا $\ln(x+1) + \ln(3-x) < 0$ يعني $\ln(x+1)(3-x) < \ln 1$

إذن $(x+1)(3-x) < 1$ وبالتالي $x^2 - 2x - 2 > 0$

أي $(x-1+\sqrt{3})(x-1-\sqrt{3}) > 0$

إذن $x \in]-\infty; 1-\sqrt{3}[\cup]1+\sqrt{3}; 3[$ و $x \in]-1; 3[$ إذن $x \in]-1; 1-\sqrt{3}[\cup]1+\sqrt{3}; 3[$

ينتج أن مجموعة حلول المتراجحة $\ln(x+1) + \ln(3-x) < 0$ هي $]1-\sqrt{3}; 1+\sqrt{3}[\cup]1+\sqrt{3}; 3[$.

4. حل المتراجحة $\ln(x^2 - 1) \geq \ln(4x - 1)$.

لحل المتراجحة $\ln(x^2 - 1) \geq \ln(4x - 1)$ نضع الشرط التالي $x^2 - 1 > 0$ و $4x - 1 > 0$ أي $x \in]1; +\infty[$.

لحل المتراجحة $\ln(x^2 - 1) \geq \ln(4x - 1)$ في المجال $]1; +\infty[$.

لدينا $\ln(x^2 - 1) \geq \ln(4x - 1)$ إذا وفقط إذا كان $x^2 - 1 \geq 4x - 1$ أي $x^2 - 4x \geq 0$ إذن $x(x - 4) > 0$.

وبالتالي $x \geq 4$ أي $x \in [4; +\infty[$.

ينتج أن مجموعة حلول المتراجحة $\ln(x^2 - 1) \geq \ln(4x - 1)$ هي $[4; +\infty[$.

3 حساب نهايات

تمرين

احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + (\ln x)^2) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \ln x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + (\ln x)^2)$$

حل

1. حساب النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \ln x)$

الدالة $x \mapsto 2x - \ln x$ معرفة على المجال $]0; +\infty[$.

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(2 - \frac{\ln x}{x} \right)$

بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{\ln x}{x} \right) = 2$

نعلم أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(2 - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$

ينتج أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \ln x) = +\infty$.

2. حساب النهاية $\lim_{x \rightarrow 1} \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right)$

الدالة $x \mapsto \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right)$ معرفة على المجال $] -1; 1[$.

لدينا $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1+x} = 0$ و $\frac{1-x}{1+x} > 0$ على المجال $] -1; 1[$.

إذن $\lim_{x \rightarrow 1} \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) = -\infty$

3. حساب النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + (\ln x)^2)$.

الدالة $x \mapsto x^2 + (\ln x)^2$ معرفة على المجال $]0; +\infty[$.

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^2 = +\infty$

و نعلم أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ ينتج أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + (\ln x)^2) = +\infty$.

4. حساب النهاية $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + (\ln x)^2)$.

لدينا $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ و نعلم أن $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$

إذن $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln x)^2 = +\infty$ ينتج أن $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + (\ln x)^2) = +\infty$.

5. حساب النهاية $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

الدالة $x \mapsto x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$ معرفة على المجال $]0; +\infty[\cup]-\infty; -1[$.

لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$

إذن توجد حالة عدم التعيين.

نضع $y = \frac{1}{x}$ عندما $x \rightarrow -\infty$: $y \rightarrow 0$.

لدينا $x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{\ln(1+y)}{y}$

ينتج أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1$

وبالتالي $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$.

6. حساب النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

بوضع $y = \frac{1}{x}$ لدينا $x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{\ln(1+y)}{y}$

و عندما $x \rightarrow +\infty$: $y \rightarrow 0$.

إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1$

وبالتالي $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$.

تمرين 1

ف دالة معرفة على المجال $[0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = x^2(-1 + 2\ln x)$ إذا كان $x > 0$ و $f(0) = 0$.

1. هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد 0 عن اليمين ؟

2. عين الدالة المشتقة f' للدالة f .

حل

1. الدالة f معرفة على المجال $[0; +\infty[$.

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2(-1 + 2\ln x)}{x} \quad \text{لدينا}$$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x(-1 + 2\ln x) \quad \text{من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ موجب تماما} :$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x(-1 + 2\ln x) \quad \text{لدينا}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (-x + 2x\ln x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 \quad \text{وبالتالي}$$

ينتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد 0 عن اليمين و $f'(0) = 0$.

2. الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $[0; +\infty[$ (f قابلة للاشتقاق على المجال $[0; +\infty[$)

و قابلة للاشتقاق عند العدد 0 عن اليمين).

$$\text{من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما } x : f'(x) = 2x(-1 + 2\ln x) + x^2\left(\frac{2}{x}\right)$$

$$= -2x + 4x\ln x + 2x$$

$$= 4x\ln x$$

$$\text{أي من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما } x : f'(x) = 4x\ln x \quad \text{و} \quad f'(0) = 0$$

$$\text{إذن الدالة } f' \text{ معرفة كما يلي : } f'(x) = 4x\ln x \quad \text{إذا كان } x > 0 \quad \text{و} \quad f'(0) = 0$$

تمرين 2

f هي الدالة المعرفة كما يلي : $f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^{2x})$.

1. عين مجموعة تعريف الدالة f .
2. ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على مجموعة تعريفها.
3. عين الدالة المشتقة f' للدالة f .

حل

1. من أجل كل عدد حقيقي x ، $1 + e^{2x} > 0$. إذن الدالة f معرفة على \mathbb{R} .

2. الدالة $e^{-x} \mapsto x$ قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}

و الدالة $\ln(1 + e^{2x}) \mapsto x$ قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} . (اشتقاق دالة مركبة)

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} . (اشتقاق جداء دالتين).

3. تعيين الدالة المشتقة f' للدالة f .

من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f'(x) = -e^{-x} \ln(1 + e^{2x}) + e^{-x} \left(\frac{2e^{2x}}{1 + e^{2x}} \right)$$

$$= -e^{-x} \ln(1 + e^{2x}) + \frac{2e^x}{1 + e^{2x}}$$

إذن من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f'(x) = -e^{-x} \ln(1 + e^{2x}) + \frac{2e^x}{1 + e^{2x}}$$

تمرين 3

f هي الدالة المعرفة كما يلي : $f(x) = \ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right)$

1. عين مجموعة تعريف الدالة f .
2. عين الدالة المشتقة f' للدالة f .

حل

1. الدالة f معرفة إذا وفقط إذا كان $2+x \neq 0$ و $\frac{2-x}{2+x} > 0$ أي $x \in]-2; 2[$

و بالتالي مجموعة تعريف الدالة f هي المجال $] -2 ; 2 [$.

2. الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $] -2 ; 2 [$.

و من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $] -2 ; 2 [$:

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{2-x}{2+x}\right)'}{\frac{2-x}{2+x}}$$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي من المجال $] -2 ; 2 [$:

$$\left(\frac{2-x}{2+x}\right)' = \frac{-4}{(2+x)^2}$$

بعد التبسيط ينتج أن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $] -2 ; 2 [$:

$$f'(x) = \frac{-4}{4+x^2}$$

تمرين

ف الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \left\{-1; -\frac{1}{2}\right\}$ كما يلي : $f(x) = \frac{2x^2 - x - 2}{2x^2 + 3x + 1}$

1. عين الأعداد الحقيقية a, b, c حيث من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن $-\frac{1}{2}$ و -1

$$f(x) = a + \frac{b}{2x+1} + \frac{c}{x+1}$$

2. استنتج الدالة الأصلية F للدالة f على المجال $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right]$ حيث $F(0) = -1$.

حل

1. الدالة f معرفة على المجموعة $\mathbb{R} - \left\{-1; -\frac{1}{2}\right\}$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن $-\frac{1}{2}$ و -1

$$a + \frac{b}{2x+1} + \frac{c}{x+1} = \frac{a(2x+1)(x+1) + b(x+1) + c(2x+1)}{(2x+1)(x+1)}$$

$$= \frac{2ax^2 + (3a+b+2c)x + a+b+c}{2x^2 + 3x + 1}$$

$$f(x) = a + \frac{b}{2x+1} + \frac{c}{x+1} \quad \text{إذن}$$

$$\frac{2ax^2 + (3a+b+2c)x + a+b+c}{2x^2 + 3x + 1} = \frac{2x^2 - x - 2}{2x^2 + 3x + 1} \quad \text{يعني}$$

$$\text{ينتج أن } 2a = 2 \quad \text{و} \quad 3a + b + 2c = -1 \quad \text{و} \quad a + b + c = -2$$

باستعمال طريقة التعويض، ينتج أن $a = 1$ و $b = -2$ و $c = -1$.

إذن من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن $-\frac{1}{2}$ و -1 : $f(x) = 1 - \frac{2}{2x+1} - \frac{1}{x+1}$

2. تعيين الدالة الأصلية F للدالة f على المجال $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right]$ حيث $F(0) = -1$

الدالة $x \mapsto x$ هي دالة أصلية للدالة $1 \mapsto x$ على $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right]$.

الدالة $x \mapsto \ln(2x+1)$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{2}{2x+1}$ على $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right]$.

الدالة $x \mapsto \ln(x+1)$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ على $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right]$.

(استعمال المبرهنة حول الدوال الأصلية للدوال من الشكل $(x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)})$)

إذن الدوال الأصلية للدالة f على $]-\frac{1}{2}; +\infty[$ هي الدوال

$$.d \in \mathbb{R} \quad \text{حيث} \quad x \mapsto x - \ln(2x+1) - \ln(x+1) + d$$

لدينا $F(0) = -1$ أي $0 + d = -1$ ينتج أن $d = -1$

إذن الدالة الأصلية F للدالة f على $]-\frac{1}{2}; +\infty[$ حيث $F(0) = -1$

هي الدالة $x \mapsto x - \ln(2x+1) - \ln(x+1) - 1$

6 استعمال اللوغاريتم العشري والدالة الأسية ذات الأساس α

تمرين 1

بسط الأعداد التالية :

$$\sqrt[4]{25} \times 125^{\frac{3}{4}} \quad ; \quad \sqrt[3]{729} \quad ; \quad \log(0,81 \times 10^{-2} \times 3^{13}) \quad ; \quad \log 16$$

حل

$$\log 16 = \log 2^4 = 4 \log 2 \quad \text{لدينا}$$

$$\text{إذن} \quad \log 16 = 4 \log 2$$

$$\log(0,81 \times 10^{-2} \times 3^{13}) = \log 0,81 + \log 10^{-2} + \log 3^{13} \quad \text{لدينا}$$

$$= \log \frac{81}{100} - 2 + 13 \log 3$$

$$= \log 81 - \log 100 + (-2) + 13 \log 3$$

$$= 4 \log 3 - 2 - 2 + 13 \log 3$$

$$= -4 + 17 \log 3$$

$$\log(0,81 \times 10^{-2} \times 3^{13}) = -4 + 17 \log 3 \quad \text{إذن}$$

$$\sqrt[3]{729} = \sqrt[3]{3^6} = \sqrt[3]{(3^2)^3} = 3^2 = 9 \quad \text{لدينا}$$

$$\sqrt[4]{25} \times 125^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{5^2} \times 5^{\frac{9}{4}} \quad \text{لدينا}$$

$$= 5^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{9}{4}} = 5^{\frac{11}{4}}$$

$$\sqrt[4]{25} \times 125^{\frac{3}{4}} = 5^{\frac{11}{4}} \quad \text{إذن}$$

تقرين

حل في \mathbb{R} كل معادلة من المعادلات التالية

$$10^{4x} = 9 \quad : \quad \log(2x) - \log(x+1) = \log(x-1) \quad : \quad \log(3x+4) = 0$$

$$10^x - 2 \times 10^{-x} = 1$$

حل

• حل المعادلة $\log(3x+4) = 0$ بوضع الشرط $3x+4 > 0$ أي $x \in \left] -\frac{4}{3}; +\infty \right[$.

$$\log(3x+4) = \log 1 \quad \text{يعني} \quad x \in \left] -\frac{4}{3}; +\infty \right[\quad \text{و} \quad \log(3x+4) = \log 1$$

$$\text{أي} \quad x \in \left] -\frac{4}{3}; +\infty \right[\quad \text{و} \quad 3x+4 = 1 \quad \text{إذن} \quad x = -1$$

وبالتالي المعادلة $\log(3x+4) = 0$ تقبل حلا واحدا هو -1 .

• حل المعادلة $\log(2x) - \log(x+1) = \log(x-1)$ بوضع الشرط $2x > 0$ و $x+1 > 0$

و $x-1 > 0$ أي $x > 1$.

$$\log\left(\frac{2x}{x+1}\right) = \log(x-1) \quad \text{و} \quad x > 1 \quad \text{يعني} \quad \log(2x) - \log(x+1) = \log(x-1)$$

$$\text{ينتج أن} \quad x > 1 \quad \text{و} \quad \frac{2x}{x+1} = x-1$$

$$\text{أي} \quad x > 1 \quad \text{و} \quad x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\Delta' = 2. \quad \text{حلا المعادلة} \quad x^2 - 2x - 1 = 0 \quad \text{هما} \quad 1 + \sqrt{2} \quad \text{و} \quad 1 - \sqrt{2}$$

إذن المعادلة $\log(2x) - \log(x+1) = \log(x-1)$ تقبل حلا واحدا هو $1 + \sqrt{2}$.

• حل المعادلة $10^{4x} = 9$ حيث x عدد حقيقي.

$$\text{لدينا} \quad 10^{4x} = 9 \quad \text{يعني} \quad \log 10^{4x} = \log 9$$

$$\text{أي} \quad 4x = \log 9 \quad \text{إذن} \quad x = \frac{1}{4} \log 9$$

وبالتالي المعادلة $10^{4x} = 9$ تقبل حلا واحدا في \mathbb{R} هو $\frac{1}{4} \log 9$.

• حل المعادلة $10^x - 2 \times 10^{-x} = 1$.

$$\text{لدينا} \quad 10^x - 2 \times 10^{-x} = 1 \quad \text{يكافئ} \quad 10^x - 2 \times \frac{1}{10^x} - 1 = 0$$

$$\text{أي} \quad 10^{2x} - 10^x - 2 = 0 \quad \text{أي} \quad (10^x)^2 - 10^x - 2 = 0$$

بوضع $t = 10^x$ ، نحل المعادلة $t^2 - t - 2 = 0$ حيث $t > 0$. ينتج أن $t = 2$.

لدينا $t = 2$ و $t = 10^x$ إذن $10^x = 2$ وبالتالي $x = \log 2$.

ينتج أن المعادلة $10^x - 2 \times 10^{-x} = 1$ تقبل حلا واحدا هو $\log 2$.

تمارين و حلول نموذجية

مسألة

ف دالة معرفة كما يلي : $f(x) = -\frac{x}{x+1} + \ln(x+1)$ و (\mathcal{C}) المنحنى الممثل لها في المستوي

المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس (\vec{i}, \vec{j}) . (الوحدة 2 cm)

1. عين مجموعة التعريف E للدالة f.

2. أدرس نهاية الدالة f عندما يؤول x إلى -1 بقيم أكبر.

(يمكن كتابة f(x) على الشكل $\frac{1}{x+1} \varphi(x)$.)

3. ادرس تغيرات الدالة f.

4. عين معادلة للمماس (T) للمنحنى (\mathcal{C}) عند النقطة ذات لفاصلة 1.

5. ادرس تغيرات الدالة g المعرفة كما يلي : $g(x) = f(x) - \left(\frac{1}{4}x - \frac{3}{4} + \ln 2\right)$

استنتج إشارة g(x) ثم الوضع النسبي للمنحنى (\mathcal{C}) و المماس (T).

6. ارسم المنحنى (\mathcal{C}) .

7. بين أنه يوجد عدنان حقيقيان a و b حيث من أجل كل عدد حقيقي x من E، $\frac{x}{x+1} = a + \frac{b}{x+1}$

8. باستعمال المكاملة بالتجزئة، احسب التكامل $\int_0^1 \ln(1+x) dx$.

9. احسب المساحة A للحيز المستوي المحدود بالمنحنى (\mathcal{C}) و المستقيمت ذات المعادلات

$x=1$; $x=0$; $y=0$. عين قيمة A بالسنتمترات المربعة.

حل

1. الدالة $x \mapsto -\frac{x}{x+1}$ معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ و الدالة $x \mapsto \ln(x+1)$ معرفة من أجل

$x > -1$ أي $x \in]-1; +\infty[$. إذن مجموعة تعريف الدالة f هي $] -1; +\infty[$ أي $E =]-1; +\infty[$

2. من أجل كل عدد حقيقي x من $] -1; +\infty[$: $f(x) = \frac{1}{x+1} [-x + (x+1) \ln(x+1)]$

نعلم أن $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$. إذن $\lim_{x \rightarrow -1} (x+1) \ln(x+1) = 0$

و بالتالي $\lim_{x \rightarrow -1} [-x + (x+1) \ln(x+1)] = 1$ و لدينا $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1} = +\infty$

بما أن $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -1} [-x + (x+1) \ln(x+1)] = 1$ فإن $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$

3. لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{x}{x+1}\right) = -1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) = +\infty$ إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $] -1; +\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x

$$f'(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$$

إشارة $f'(x)$ على E هي إشارة x على E . ينتج أن الدالة f متناقصة على المجال $]-1; 0]$ و متزايدة على المجال $[0; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

. دراسة الفروع اللانهائية للمنحنى (E).

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$ إذن المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ مستقيم مقارب يوازي محور الترتيب.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ لأن $\frac{f(x)}{x} = -\frac{1}{x+1} + \left(\frac{x+1}{x}\right) \frac{\ln(x+1)}{x+1}$

و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$ إذن المنحنى (E) يقبل فرع قطع مكافئ وفي اتجاه محور الفواصل بجوار $+\infty$.

4. لدينا $f(1) = -\frac{1}{2} + \ln 2$ و $f'(1) = \frac{1}{4}$.

إذن معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 1 هي $y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4} + \ln 2$.

5. دراسة تغيرات الدالة g .

الدالة g معرفة و قابلة للاشتقاق على المجال $]-1; +\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x

$$g'(x) = -\frac{(x-1)^2}{4(x+1)^2} \quad \text{من }]-1; +\infty[$$

نلاحظ أن $g'(x) = 0$ من أجل $x = 1$.

إذن من أجل كل عدد حقيقي من $]-1; +\infty[$: $g'(x) \leq 0$.

و بالتالي الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-1; +\infty[$.

جدول تغيرات g :

x	-1	1	$+\infty$
$g'(x)$		-	-
$g(x)$	$+\infty$	0	$-\infty$

لدينا $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ و $g(1) = 0$

من جدول تغيرات الدالة g ينتج أن $g(x) < 0$ على المجال $]1; +\infty[$

ينتج أن (E) فوق (T) على المجال $]1; +\infty[$ ، (E) تحت (T) على المجال $]-1; 1]$

(T) يقطع (E) في النقطة ذات الفاصلة 1.

نلاحظ أن النقطة ذات الفاصلة 1 من (E)

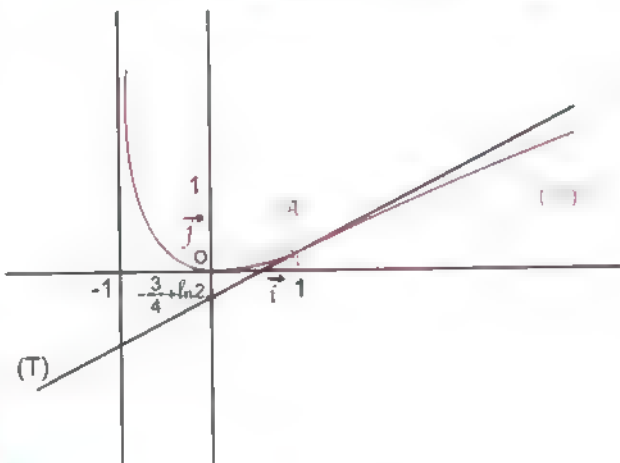
هي نقطة إنعطاف (E) (لأن (T)

يقطع (E) فيها).

6. رسم المنحنى (E) و المماس (T).

$$f(1) = -\frac{1}{2} + \ln 2 \approx 0,19$$

$$-\frac{3}{4} + \ln 2 \approx 0,60$$



تمارين و حلول نموذجية

7. من أجل كل عدد حقيقي x من E : $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$ إذن $a=1$ و $b=-1$

8. حساب التكامل $\int_0^1 \ln(1+x) dx$

نضع $u'(x) = \frac{1}{x+1}$ و $v(x) = x+1$ إذن $u(x) = \ln(x+1)$ و $v'(x) = 1$

ينتج أن $\int_0^1 \ln(x+1) dx = \left[(x+1) \ln(x+1) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x+1}{x+1} dx$

$$= \left[(x+1) \ln(x+1) - x \right]_0^1 = 2 \ln 2 - 1$$

إذن $\int_0^1 \ln(x+1) dx = 2 \ln 2 - 1$

ملاحظة : يمكن إختيار $v(x) = x$ لحساب التكامل السابق.

$$9. \mathcal{A} = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left[\left(-1 + \frac{1}{x+1} + \ln(x+1) \right) \right] dx$$

$$= \left[-x + \ln(x+1) + (x+1) \ln(x+1) - x \right]_0^1$$

$$= -2 + 3 \ln 2$$

إذن $\mathcal{A} = -2 + 3 \ln 2$ وحدة المساحات

و بالتالي $\mathcal{A} = 4(-2 + 3 \ln 2) \text{ cm}^2$ أي $\mathcal{A} \approx 0,32 \text{ cm}^2$

خواص جبرية

1 بسط : $\ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

$4 \ln(\sqrt{2}+1) + 4 \ln(\sqrt{2}-1) - 5 \ln 2$

$\frac{\ln(\sqrt{3}+1) + \ln(\sqrt{3}-1)}{2}$

$\frac{7}{16} \ln(3+2\sqrt{2}) - 4 \ln(\sqrt{2}+1) - \frac{25}{8} \ln(\sqrt{2}-1)$

$2 \ln e^4 ; 8 - \ln \frac{1}{e}$

2 a و b عدنان حقيقيان مرجبان تماما.

عبر عن $\ln a^2 b^3$ و $6 \ln \frac{1}{\sqrt{a^2 b}}$ بدلالة $\ln a$ و $\ln b$.

3 عبر عن الأعداد التالية بدلالة $\ln 2$ و $\ln 5$.

$\ln 6,25 ; \ln \frac{16}{25} ; \ln 500$

$\ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} + \dots + \ln \frac{98}{99} + \ln \frac{99}{100}$

4 في كل حالة من الحالات التالية، عين العدد

الطبيعي n حيث : $2^n \leq 10^3 ; \left(\frac{1}{4}\right)^n \leq 10^{-2}$

$1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n \geq 0,3 ; \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \leq 0,1$

معادلات

5 حل كل معادلة من المعادلات التالية في R

$\ln x = \frac{1}{2} ; \ln x = -2 ; \ln x = 2$

$[\ln x]^2 = 4 ; \ln x^2 = 4 ; \ln |x| = 2$

6 حل في R كل معادلة من المعادلات التالية :

$\ln(1-x)^2 = 4 \ln 2 ; \ln(1-x) = 2 \ln 3 - 3 \ln 2$

$\ln \sqrt{1-x} = \frac{1}{2} \ln 3 ; \ln \left(\frac{1}{1-x}\right) = -3 \ln 2$

7 حل كل معادلة من المعادلات التالية في R

$\ln(2x+7) = \ln(x-3)$

$\ln x + \ln(3x+2) = \ln(2x+3)$

$\ln(x-3) = \ln(x+7) - \ln(x+1)$

$\ln(x^2 - 2x - 3) = \ln(x+7)$

$\ln\left(\frac{x+7}{x+1}\right) = \ln(x+3)$

$\frac{1}{2} \ln(1+x^2) = \ln(x+2)$

$\frac{1}{2} \ln(x-1) + \ln(x+1) = 2 + \ln \sqrt{1+x}$

8 P(x) كثير حدود حيث

$P(x) = 12x^3 + x^2 - 9x + 2$

1. عين الأعداد الحقيقية a, b, c حيث من أجل

كل عدد حقيقي x : $P(x) = (x+1)(ax^2 + bx + c)$

حل في R المعادلة $P(x) = 0$.

2. استنتج حلول المعادلة

$12(\ln x)^3 + (\ln x)^2 - 9 \ln x + 2 = 0$

مراجعات

9 حل في R كل متراجحة من المتراجحات

التالية : $\ln(3-x) \leq 0 ; \ln\left(\frac{x+1}{2x+1}\right) \geq 0$

$\ln(x+2) + \ln(3+x) > 0$

$\ln(x^2 - 4) > \ln(6x + 5)$

$\ln(2x-5) + \ln(x+1) \leq 2 \ln 2$

10 حل في R كل متراجحة من المتراجحات

التالية : $\ln(x+1) > \ln(4x-2) - \ln(x-1)$

$\ln(x^2 + 11x + 30) > \ln(x+14)$

$\ln\left(\frac{x+1}{3x-5}\right) \geq 0 ; \ln(x^2 - 2e^2) \leq \ln x + 1$

الجميل

11 حل كل جملة من الجمل التالية في $R \times R$

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ \ln x + \ln y = \ln 2 \end{cases} ; \begin{cases} x + y = 30 \\ \ln x + \ln y = 3 \ln 6 \end{cases}$

$\begin{cases} \ln x + \ln y = \ln \frac{2}{3} \\ x + y = \frac{4}{3} \end{cases} ; \begin{cases} 2 \ln x + 3 \ln y = -2 \\ 3 \ln x + 5 \ln y = -4 \end{cases}$

$\begin{cases} \ln(x^2 - y^2) = 0 \\ x - y = 2 \end{cases} ; \begin{cases} 5x + 4y = 12 \\ \ln(x-1) + \ln y = \ln 3 - \ln 5 \end{cases}$

تمارين و مسائل

النهايات

12 عين النهايات عند 0 و عند $+\infty$ لكل من

الدوال التالية (عند وجودها) :

$$\begin{aligned} x \mapsto \sqrt{1 + (\ln x)^2} & ; \quad x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \\ x \mapsto \frac{\ln x - 2}{\ln x + 1} & ; \quad x \mapsto x - 2 \ln x \end{aligned}$$

13 عين النهايات عند $+\infty$ لكل دالة من الدوال

$$\begin{aligned} x \mapsto x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) & \quad (\text{عند وجودها}) \\ x \mapsto \frac{\ln(1+x^2)}{x} & ; \quad x \mapsto \frac{\ln x}{x - \ln x} \end{aligned}$$

$$x \mapsto x \ln \left(\frac{2x-3}{x}\right) ; \quad x \mapsto \frac{x^2 \ln x}{1+x}$$

$$x \mapsto x - (\ln x)^2 ; \quad x \mapsto \ln \left(\frac{1+2e^x}{e^{2x}-1}\right)$$

الدوال المشتقة

14 في كل حالة من الحالات التالية، عين

مجموعة قابلية اشتقاق للدالة f ثم عبّر عن $f'(x)$

$$f(x) = \ln |7 - 2x| ; \quad f(x) = \ln(5x - 1)$$

$$f(x) = x^2 \ln x ; \quad f(x) = \ln \left(\frac{x+1}{x-2}\right)$$

$$f(x) = 3x + \ln(1 + e^{-2x}) ; \quad f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$f(x) = \ln(4x^2 - 3x - 1) ; \quad f(x) = \ln \left(\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}\right)$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} ; \quad f(x) = x^2 \ln(1+x)$$

تعيين دوال أصلية

15 f دالة معرفة على \mathbb{R} كما يلي :

$$f(x) = \frac{e^x - 2}{2e^x + 1}$$

اثبت أنه يوجد عدنان حقيقيان a, b حيث من

$$f(x) = a + \frac{be^x}{2e^x + 1} ; \quad x \text{ أجل كل عدد حقيقي}$$

عين دالة أصلية للدالة f على \mathbb{R} .

16 g هي الدالة المعرفة على \mathbb{R} كما يلي :

$$g(x) = \frac{e^{2x}}{e^x + 4}$$

اثبت أنه يوجد عدنان حقيقيان a, b حيث

من أجل كل عدد حقيقي x :

$$g(x) = ae^x + \frac{be^x}{e^x + 4}$$

عين الدالة الأصلية للدالة g التي تنعدم عند 0.

الدوال الأسية والدوال اللوغاريتم العشري

17 بسط كتابة العدد $a = \frac{\sqrt[6]{6}(\sqrt[3]{2})^2\sqrt{12}}{\sqrt[3]{3^4}\sqrt[3]{6^2}}$

بالرفع إلى القوة 6.

باستعمال القوى الناطقة.

18 بسط الأعداد التالية : $\sqrt[3]{8}$; $\sqrt[4]{81^3}$; $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$

$$\frac{(\sqrt[3]{4})^2 \sqrt[4]{2}}{\sqrt[10]{4^3}} ; \quad \frac{\sqrt[5]{4^2} \sqrt[4]{2}}{\sqrt[3]{8}}$$

19 حل في \mathbb{R} كل معادلة من المعادلات التالية :

$$9^x - 3^{x+2} = \frac{3^5}{4} ; \quad 4^x + 3 \times 2^x + 10 = 0$$

$$x^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{x}\right)^x ; \quad 2^{2x} + 2^{2x-1} = 3^{x+\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}}$$

20 عين مجموعة تعريف و الدالة المشتقة f'

لكل دالة من الدوال f التالية :

$$f(x) = 2^x ; \quad f(x) = x^{\frac{2}{3}}$$

$$f(x) = x^x ; \quad f(x) = x^2 3^x$$

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x ; \quad f(x) = (\ln x)^x$$

21 عين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة

تعريفها في كل حالة من الحالات التالية :

$$f(x) = x^x ; \quad f(x) = x^{\frac{1}{x}}$$

$$f(x) = \frac{x^x}{\ln x} ; \quad f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

25 f هي الدالة المعرفة R كما يلي :

$$f(x) = x - 4 + \ln(1 + e^{3x})$$

و (\mathbb{E}) هو المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, O)$.

1. أثبت أن الدالة f متزايدة تماما على R .

2. احسب نهاية $\ln(1 + e^{3x})$ عند $-\infty$.

3. استنتج وجود مستقيم مقارب للمنحنى (\mathbb{E}) ثم عين معادلة له.

4. بين أن من أجل كل عدد حقيقي x ,

$$f(x) = 4x - 4 + \ln(1 + e^{3x})$$

5. ما هي نهاية $\ln(1 + e^{3x})$ عند $+\infty$ ؟

6. استنتج وجود مستقيم مقارب آخر للمنحنى (\mathbb{E}) ثم عين معادلة له.

7. ارسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (\mathbb{E}) في نفس المعلم.

26 f هي الدالة العددية المعرفة كما يلي :

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^{2x} + 5}{e^{2x} - 2}\right)$$

و (\mathbb{E}) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, O)$.

1. ما هي مجموعة التعريف E للدالة f ؟

2. ادرس تغيرات الدالة f و كذا نهاياتها عند حدود مجموعة التعريف E .

3. لتكن g الدالة المعرفة على E كما يلي

$$g(x) = f(x) - x$$

• عين نهاية $g(x)$ لما يؤول x إلى $+\infty$.

• ادرس إشارة $g(x)$.

• ماذا يمكن استنتاجه بالنسبة إلى المنحنى (\mathbb{E}) ؟

4. ارسم المنحنى (\mathbb{E}) .

22 عين دالة أصلية للدالة f على المجال I

في كل حالة من الحالات التالية :

$$I =]0 ; +\infty[\quad ; \quad f(x) = x^{\frac{2}{3}}$$

$$I =]0 ; +\infty[\quad ; \quad f(x) = x^2 \sqrt{x}$$

$$I = R \quad ; \quad f(x) = 5^x$$

مسائل

23 نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي

$$f(x) = (x - 1) \ln(x^2)$$

و (\mathbb{E}) المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, O)$.

1. عين مجموعة تعريف الدالة f .

2. عين نهايات f عند حدود مجموعة تعريفها.

3. ادرس تغيرات الدالة f .

4. حل المعادلة $f(x) = 0$.

5. ارسم المنحنى (\mathbb{E}) .

24 نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

و (\mathbb{E}) المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, O)$.

1. عين D_f مجموعة تعريف الدالة f .

2. بين أن من أجل كل عدد حقيقي x من D_f

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{و} \quad D_f \text{ ينتمي إلى } D_f$$

ما هو التفسير البياني الذي تعطيه لهذه النتيجة ؟

3. بين أن المنحنى (\mathbb{E}) يقبل ثلاث مستقيمات مقاربة يطلب تعيين معادلة لكل منها.

4. ادرس تغيرات الدالة f .

5. عين معادلة المماس (Δ) للمنحنى (\mathbb{E}) عند النقطة ذات الفاصلة e .

6. ارسم (Δ) و (\mathbb{E}) في المعلم السابق.